## SESIÓN 10

## REGLAS BÁSICAS PARA COMBINAR PROBABILIDADES

### I. CONTENIDOS:
1. Reglas básicas para combinar probabilidades.
2. Diagramas de Venn.

### II. OBJETIVOS:
Al término de la Sesión, el alumno:
- Distinguirá e identificará eventos independientes y dependientes.
- Comprenderá que la ocurrencia de un evento afecta la ocurrencia de eventos subsecuentes

### III. PROBLEMATIZACIÓN:
*Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.*
- ¿Los eventos formados por dos o más sucesos se pueden representar gráficamente?
- ¿Un gráfico puede representar probabilidades de ocurrencia?

### IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:
#### 1.1. Reglas básicas para combinar probabilidades
Ya se mencionó qué son los eventos mutuamente excluyentes y los que no lo son. Hay una regla general para calcular la probabilidad de eventos disyuntos, es decir, que son la combinación de eventos más simples, donde puede ocurrir uno u otro o ambos.

Sea
A un evento probable en un fenómeno aleatorio.
P(A) su probabilidad de ocurrencia.
B otro evento probable en el mismo fenómeno aleatorio.
P(B) su probabilidad de ocurrencia.

Entonces, si son eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$$

Esto significa que la probabilidad de que ocurra cualquiera de los dos es la suma de sus probabilidades.

Pero, si no son eventos mutuamente excluyentes:

$$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) – P(A \text{ y } B)$$

Esto quiere decir que la probabilidad de que ocurra uno de ellos o ambos es igual a la suma de sus probabilidades menos la probabilidad de que ocurran ambos.

Por otra parte, un par de eventos son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la ocurrencia del otro. En una selección de elementos de un conjunto dado, sin que los elementos se reintegren al conjunto, cada selección afecta la probabilidad de ocurrencia de las subsiguientes. En este caso tenemos eventos dependientes.

Si dos eventos son independientes, la probabilidad de ocurrencia de ambos se calcula multiplicando sus individuales probabilidades asociadas:

P(A y B) = P(A) × P(B)

Una probabilidad condicional, de un suceso, se calcula con el conocimiento de otro suceso que ya ocurrió:

$$P(B/A) = \frac{P(AyB)}{P(A)}$$

Donde se espera que ocurra B, ya que A ya ocurrió.

**Ejemplo 1** ¿Cuál es la probabilidad de que se integre un equipo de trabajo con dos mujeres y un hombre, si se eligen al azar los integrantes de un grupo de seis hombres y siete mujeres?

Para resolver el problema primero necesitamos saber cuántos equipos diferentes se pueden formar, sabemos que el equipo es de tres integrantes y que las personas que lo pueden formar son trece.

Debemos emplear el análisis combinatorio. Calculamos las combinaciones de trece elementos tomados de tres en tres. En las calculadoras científicas se tiene la función para el cálculo de combinaciones, el símbolo es ${}_nC_r$

Entonces calculamos ${}_{13}C_3$
El resultado es 286

Otra forma de calcularlos es con la expresión ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$

$$= \frac{13*12*11*10*9*8*7*6*5*4*3*2*1}{(3*2*1)(10*9*8*7*6*5*4*3*2*1)}$$

$$= \frac{6227020800}{(6)(3628800)} = 286$$

Ahora falta saber cuántos equipos se pueden formar con dos mujeres y un hombre, para ello nuevamente recurrimos al análisis combinatorio. Puesto que la idea de que un equipo está formado por dos mujeres y un hombre de un total de siete mujeres y seis hombres, se puede traducir en dos mujeres forman el equipo de un total de siete y un hombre de un total de seis. Al ser eventos independientes aplicamos la regla descrita y además el análisis combinatorio.

$$({}_7C_2)({}_6C_1)$$

Calculando esto, se obtiene el número 126

Entonces hay 126 maneras diferentes de formar un equipo con dos mujeres y un hombre, además hay 286 formas diferentes de integrar a los equipos. Por lo tanto la probabilidad de que un equipo esté formado por dos mujeres y un hombre es:

$$P = \frac{126}{286} = \frac{63}{143} = 0.4405 = 44.05\%$$

## 2.1. Diagramas de Venn

Son gráficos que permiten representar eventos simples y sus combinaciones en los fenómenos aleatorios, fueron propuestos desde 1880 por el inglés John Venn. Utiliza círculos para representar los eventos y un rectángulo para representar el fenómeno aleatorio. Los círculos se enlazan entre sí si son representaciones de un evento disyunto. El área común representa la probabilidad de ocurrencia de ambos eventos y las áreas restantes, la probabilidad de que sólo ocurra uno de los eventos.

El área fuera de los círculos representa la probabilidad de que no ocurra el evento asociado al círculo. Esto se conoce como complemento del evento.

El fenómeno aleatorio se explicita mediante su espacio muestral. Si los eventos son mutuamente excluyentes se dibujan sus respectivos círculos sin traslaparse.

**Ejemplo 2** En una secundaria el 65% de los estudiantes son aficionados del equipo de fútbol “Las Chivas”, sólo al 30% de ellos les gustan las canciones de “banda”, pero a un 18% ni les gustan las canciones de “banda” ni son aficionados a las “Chivas”. Construye un diagrama de Venn para contestar lo siguiente:

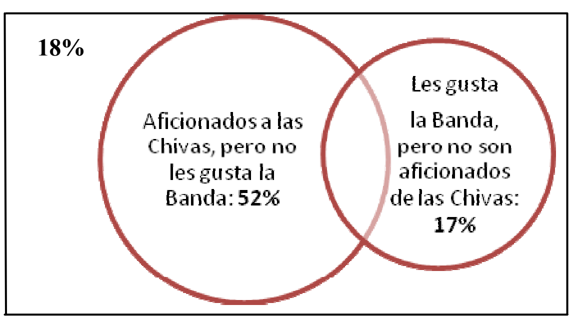
*a) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos de esa secundaria que les gustan las canciones de “Banda” y son aficionados de las “Chivas”.*

*b) ¿Cuál es el porcentaje de alumnos que son aficionados de las “Chivas”, pero que no les gustan las canciones de “Banda”.*

Para resolver el problema se consideran los eventos “Aficionados de las Chivas” y “Les gustan las canciones de Banda”, éstos eventos se representan con círculos dentro del espacio muestral “Alumnos de la secundaria” que se representa con un rectángulo.

El área fuera de los círculos, pero dentro del rectángulo, es ese 18% de alumnos que menciona la descripción del problema; esto porque serán los que no se incluyen en los eventos descritos, los que están fuera de los conjuntos formados por alumnos que: “son aficionados de las Chivas **o** les gustan las canciones de Banda”

Los círculos deben traslaparse, pues si sumamos los porcentajes que se describen en el problema, resultan 113%, que no puede ser. Entonces el área del traslape debe representar a ese 13% que “sobra”. Restándole 13% a los porcentajes de los eventos tenemos los correspondientes a las partes de las áreas de los círculos que quedan si no consideramos el traslape. El diagrama de Venn queda:




Si a 65% le resto 13%, me queda un 52%. Si a 30% le resto 13% me queda 17%, estos son los porcentajes que se muestran en el diagrama, el área de traslape debe tener el citado 13%.

Resumiendo:

*A un 18% de los estudiantes ni les gusta la Banda ni son aficionados a las Chivas.*
*A un 52% de los estudiantes no les gusta la Banda pero son aficionados a las Chivas.*
*A un 13% de los estudiantes les gusta la Banda y son aficionados a las Chivas.*
*A un 17% de los estudiantes les gusta la Banda pero no son aficionados de las Chivas.*

Entonces las respuestas son:

a) 13%
b) 52%

**Ejemplo 3** Se tienen tres cajas, cada una con monedas. La primera tiene tres monedas de cobre, dos de plata, y una de oro; la segunda tiene tres de plata, cuatro de oro, y dos de cobre; la tercera tiene cuatro de cobre, dos de oro y dos de plata.

a) Si se mete la mano en una de las cajas, al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la moneda que saque la persona sea de oro?
b) Si la moneda que sacó la persona es de oro, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido obtenida de la segunda caja?

Se asignan símbolos a las probabilidades:

P(A) Es la probabilidad de sacar una moneda de oro.
P(B) Es la probabilidad de sacar una moneda de plata.
P(C) Es la probabilidad de sacar una moneda de cobre.

Se analizan las probabilidades de cada caja por separado.

Para la primera caja $P(A)=\frac{1}{6}$ $P(B)=\frac{2}{6}$ $P(C)=\frac{3}{6}$

Para la segunda caja $P(A)=\frac{4}{9}$ $P(B)=\frac{3}{9}$ $P(C)=\frac{2}{9}$

Para la tercera caja $P(A)=\frac{2}{8}$ $P(B)=\frac{2}{8}$ $P(C)=\frac{4}{8}$

El primer inciso se puede interpretar como la probabilidad de sacar una moneda de la caja uno y que sea de oro, o sacar una moneda de la caja dos y que sea de oro, o sacar una moneda de la caja tres y que sea de oro.

La probabilidad de que se meta la mano, para sacar la moneda, en cualquiera de las cajas es de $\frac{1}{3}$

Según las reglas estudiadas:

$$P=\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{9}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{8}\right)=\frac{31}{108}=0.2870=28.7\%$$

Para el segundo inciso, como la extracción de la moneda de oro ya es un hecho, y sólo se desea calcular la probabilidad de que haya sido sacada de la segunda caja.

Aplicando la regla de la probabilidad condicional:

$$P(B/A)=\frac{P(AyB)}{P(A)}$$

P(A) representa la extracción de una moneda de oro de alguna de las cajas.
P(B) representa la extracción de la moneda de oro de la caja dos.

Puesto que en las cajas hay 23 monedas de las cuales 7 son de oro:

$$P(A)=\frac{7}{23}$$

Como hay cuatro de las siete monedas de oro en la caja dos:

$$P(B)=\frac{4}{23}$$

Finalmente, los resultados se dividen como señala la regla:

$$P(B/A)=\frac{P(AyB)}{P(A)}=\frac{\frac{4}{23}}{\frac{7}{23}}=\frac{4}{7}=0.5714=57.14\%$$

## V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

a. Resuelve los siguientes planteamientos.

1. Un grupo de estudiantes está formado por 20 hombres y 10 mujeres. Del grupo se escogen aleatoriamente tres estudiantes. ¿Cuál es la probabilidad de que sean escogidos dos hombres y una mujer?

2. Existen tres cajas: A, B y C. La caja A contiene dos monedas de cobre, la B una cobre y dos de níquel y la C, una de plata dos de níquel y dos de cobre. Se toma al azar una de las cajas y luego se saca una moneda de estas. Si es de cobre, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido tomada de la caja A?

3. En cierta ciudad el 40 % de la población tiene el cabello castaño; el 20% tiene los ojos negros y el 5% tiene los ojos negros y el cabello castaño. Se escoge una persona al azar, calcula la probabilidad de que:
    a. Tenga el cabello castaño o los ojos negros.
    b. Tenga solo el cabello castaño, pero no los ojos negros.
    c. No tenga el cabello castaño ni los ojos negros.